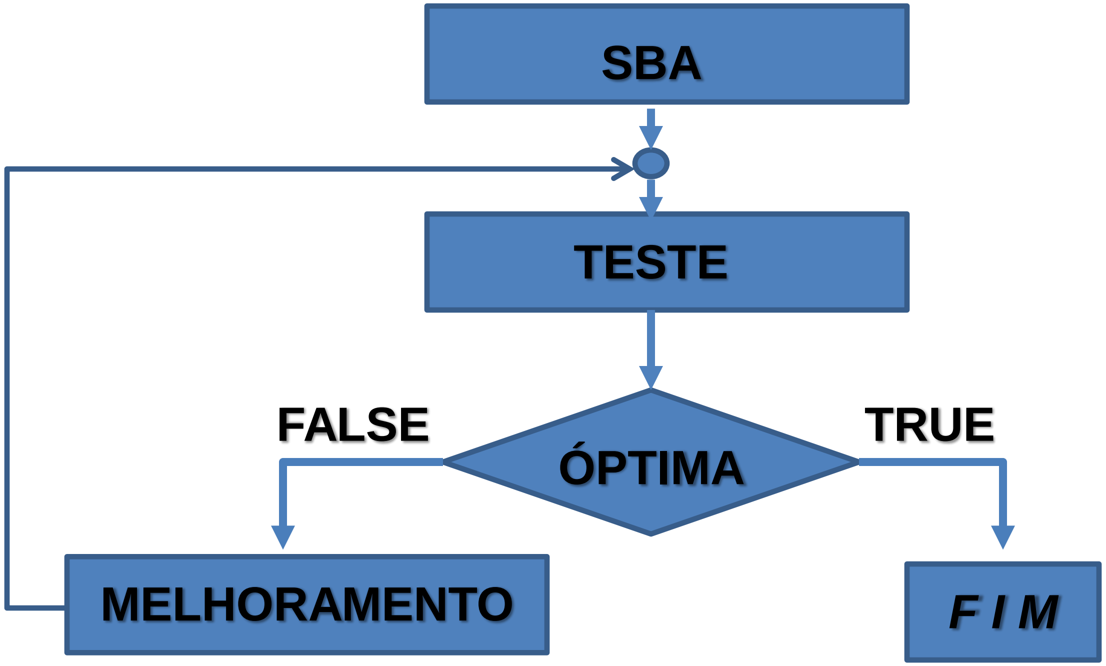
TEMA 4: PROBLEMAS DE TRANSPORTE E AFECTAÇÃO

Obtenção da solução óptima

Obtida uma SBA inicial, esta é submetida ao teste de optimalidade, passando-se em seguida a outra solução, caso o critério respectivo não seja satisfeito; o processo repete-se até se obter a solução óptima.



Uma ***solução é degenerada***, quando o número de células ocupadas for menor do que **m + n –1.** Esta situação pode ocorrer tanto na primeira aproximação como em qualquer estado do melhoramento da solução.

Algoritmo

Sejam $\mathbf{u_i}$ e $\mathbf{v_j}$ as variáveis duais associadas, respectivamente, às restrições de oferta e de procura. A cada variável básica do problema primal (célula preenchida) está associada uma restrição saturada do problema dual: $\mathbf{x_{ij}}$ (VB do primal) $\Leftrightarrow$ $\mathbf{u_i + v_j = c_{ij}}$. O algoritmo é composto pelos seguintes passos:

Passo 1. Determinar uma SBA inicial;

Passo 2. Determinar as variáveis duais, fazendo $\mathbf{u_1 = 0}$, e calcular as restantes usando as células ocupadas;

Passo 3. Se $\mathbf{u_i + v_j \leq c_{ij}}$ para todas as células não preenchidas então a solução é óptima; caso contrário, continuar no passo seguinte;

Passo 4. Seleccionar para a nova VB a célula para a qual se verifica $\mathbf{u_i + v_j > c_{ij}}$ e que conduza a um maior decréscimo no custo total. Transferir para essa célula o número máximo de unidades possível. Voltar ao Passo 2.

Exemplo : Certa empresa possui 2 fábricas a produzirem determinado produto, a ser depois transportado para 3 centros de distribuição. As fábricas 1 e 2 produzem 100 e 50 carregamentos por mês, respectivamente. Os centros 1, 2 e 3 necessitam de receber 80, 30 e 40 carregamentos por mês, respectivamente. Sabendo que os custos de transporte, por carregamento, são os que constam no quadro :

	Centro 1	Centro 2	Centro 3
Fábrica 1	7	4	3
Fábrica 2	3	1	2

Passo 1. Supondo que a SBA inicial é a obtida pelo método do Canto Noroeste, tem-se o quadro:

	C1		C2		C3		Oferta
F1	80	7	20	4	$\mathbf{x_{13}}$	3	100
F2	$\mathbf{x_{21}}$	3	10	1	40	2	50
Procura	80		30		40		150

$$Z = 7\times 80 + 4\times 20 + 1\times 10 + 2\times 40 = 730$$

Passo 2. A cada VB do primal está associada uma restrição saturada do dual. Assim,

VB do Primal	Restrição do Dual	$U_1 = 0$
x_{11}	$u_1+v_1=7$	$u_1= 0, v_1=7$
x_{12}	$u_1+v_2=4$	$u_1= 0, v_2=4$
x_{22}	$u_2+v_2=1$	$v_2= 4, u_2=-3$
x_{23}	$u_2+v_3=2$	$u_2=-3, v_3=5$

Passo 3. Verificar *Se* $\boldsymbol{u_i + v_j \leq c_{ij}}$ *para todas as células não preenchidas*

Como:

$$X_{13}: u_1 + v_3 \leq c_{13}? \Rightarrow 0 + 5 > 3$$
$$X_{21}: u_2 + v_1 \leq c_{23}? \Rightarrow -3 + 7 > 3$$

continuar no passo seguinte.

Passo 4. Determinar qual daquelas células irá causar maior redução no custo total de transporte, que será a que irá entrar na nova SBA. As VNB candidatas a entrar na base são x_{13} e x_{21}.

	C1		C2		C3		Oferta
F1	80	7	20	4	$\mathbf{x_{13}}$	3	100
F2	$\mathbf{x_{21}}$	3	10	1	40	2	50
Procura	80		30		40		150

Relativamente a x_{13}, tem-se :

(-)	20	$\mathbf{x_{13}}$	(+)
(+)	10	40	(-)

Podendo ser transferidas, no máximo 20 unidades (min { 20, 40 }). A diminuição no custo total de transporte, por unidade transferida para a célula (1, 3) é : $u_1 + v_3 - c_{13} = 2$; assim, se x_{13} for a nova VB, haverá um decréscimo de 40 unidades no custo total (2×20).

Relativamente a x_{21}, tem-se :

(-)	80	20	(+)
(+)	$\mathbf{x_{21}}$	10	(-)

Podendo ser transferidas, no máximo 10 unidades (min { 10, 80 }). A diminuição no custo total de transporte, por unidade transferida para a célula (2, 1) é : $u_2 + v_1 - c_{21} = 1$; assim, se x_{21} for a nova VB, haverá um decréscimo de 10 unidades no custo total (1 × 10).

Desta forma, introduzindo **x13** na base, obtém-se o seguinte quadro :

	C1		C2		C3		Oferta
F1	80	7	x_{12}	4	20	3	100
F2	x_{21}	3	30	1	20	2	50
Procura	80		30		40		150

$$Z = 7\times 80 + 3\times 20 + 1\times 30 + 2\times 20 = 690$$

Voltar ao **passo 2** – teste da solução obtida, continuar nos passos seguintes até que se atinja a solução óptima.

	C1		C2		C3		Oferta
F1	30	7	30	4	40	3	100
F2	50	3	x_{22}	1	x_{23}	2	50
Procura	80		30		40		150

$$Z = 7\times 30 + 4\times 30 + 3\times 40 + 2\times 50 = 600$$

Método das Pedras para o teste de solução

O método proposto por Stepping Stone, consiste em avaliar os custos efectivos das rotas para encontrar a rota mais viável do problema de transporte com objectivo de melhorar a solução.

Passo 1. Identificar todas as células não alocadas ou todas as variáveis não básicas;

Passo 2. Traçar todos circuitos de avaliação tendo em conta que cada circuito deve começar e terminar na mesma variável não básica, passando por variáveis básicas e deve-se movimentar só no sentido vertical ou horizontal.

Passo 3. Começando da variável não básica colocar o sinal (+) e sinal (-) em todos os cantos alternando até passar em todos cantos do circuito de avaliação.

Passo 4. Para cada circuito, calcular os preços de sombra δ_{ij} como adição entre a soma dos custos (lucros) com o sinal (+) e soma dos custos (lucros) com o sinal (-).

$$\delta_{ij} = \Sigma(+c_{ij}) + \Sigma(-c_{ij}) \quad \text{ou} \quad \delta_{ij} = \Sigma(+l_{ij}) + \Sigma(-l_{ij})$$

Passo 5. Se todos os *preços de sombra* forem positivos ($\delta_{ij} \geq 0$, para minimização) ou negativos ($\delta_{ij} \leq 0$, para maximização) a solução é óptima caso contrário a solução pode ser melhorada.

Método de MODI para o teste de solução

Para aplicar o método de MODI, começa–se também com a solução da primeira aproximação, mas agora, partindo dos valores dos custos ou lucros calcula-se os valores de cada coluna v_j e linha u_i.

Passo 1. Partindo da tabela da primeira aproximação, construir um sistema de equações, escrevendo uma equação para cada variável básica, i.é:

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{para} \quad x_{ij} \neq 0$$

Passo 2. Depois de todas equações serem escritas, faz-se um qualquer u_i ou v_j igual a zero, de preferência o que aparecer em mais equações.

Passo 3. Resolver o sistema de equações do passo 1, tomando em conta que um u_i ou v_j é nulo. Determina-se assim os valores dos restantes *u's* e *v's*.

Passo 4. Calculam-se os preços de sombra “multiplicadores do simplex” para cada variável não básica usando a formula:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \quad \text{para} \quad x_{ij} = 0$$

Passo 5. Se todos os *preços de sombra* forem positivos ($\delta_{ij} \geq 0$, para minimização) ou negativos ($\delta_{ij} \leq 0$, para maximização) a solução é óptima caso contrário a solução pode ser melhorada.

Exemplo: Uma empresa manufactura cadeiras em três fábricas e manda-as para três armazéns onde posteriormente os clientes compram-nas. A gerência deseja maximizar o lucro no fim de cada lote vendido. Os lucros unitários variam com as distâncias entre os armazéns e as fábricas conforme a tabela.

Fábrica	1	2	3	Oferta
1	20	22	14	40
2	15	20	13	50
3	22	23	18	30
Procura	28	38	54	

a) Estabeleça a solução inicial pelo método de lucro máximo.

b) Use o método de aproximação de Vogel, para obter a solução base.

c) Partindo da solução aproximada de Vogel, use o método das (i) pedras e algoritmo de Stepping Stone , (ii) MODI e algoritmo de Stepping Stone para determinar a solução óptima.

SUMÁRIO

Teste de optimidade e melhoramento de solução

- Método das Pedras para o teste de solução
- Método de MODI para o teste de solução
- Método de Stepping Stone para o Melhoramento da Solução

TPC: Exercícios 5.6 a 5.10 (Mulenga)